1. Termumformungen

Terme wie $4x + (2 + x)$ oder $(3 - x) - 2x$ heißen **Summenterme.**

a) Addition und Subtraktion von Summentermen

Steht ein **Plus**zeichen vor einer Klammer, so kann dieses weggelassen werden.

$$a + (b + c) = a + b + c$$

Steht ein **Minus**zeichen vor einer Klammer, so ändert man die Vorzeichen der Summanden in der Klammer und addiert sie.

$$\begin{aligned} a - (b + c) &= a + (-b) + (-c) \\ &= a - b - c \end{aligned}$$

b) Multiplikation von Summentermen

Jeder Summand der ersten Summe wird mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert; die dabei entstehenden Produkte werden addiert.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

c) Ausmultiplizieren und Faktorisieren

$$\text{Summenterm} \underset{\textbf{Ausmultiplizieren}}{\overset{\textbf{Faktorisieren}}{\rightleftarrows}} \text{Produktterm}$$

2. Die Binomischen Formeln

Für alle a, b $\in \mathbb{Q}$ gilt:

1. Binomische Formel	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binomische Formel	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Binomische Formel	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

3. Extremwerte

Für Terme der Form $\mathbf{T(x) = a(x + t)^2 + s}$ mit a, s, t $\in \mathbb{Q}$, a $\neq$ 0, gilt:

	a > 0	a < 0
Art des Extremwerts	Minimum	Maximum
Extremwert	$T_{min} = s$	$T_{max} = s$
Belegung von x	x = -t	x = -t

Extremwertbestimmung durch quadratische Ergänzung

Durch Anwendung der binomischen Formeln können quadratische Terme so umgeformt werden, dass nach oben genannten Regeln der Extremwert des Terms bestimmt werden kann.

Beispiel:

$\mathbf{T(x) = 2x^2 - 12x + 8}$

$\mathbf{= 2(x^2 - 6x + 4)}$ ***Faktor vor x² ausklammern***

$\mathbf{= 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 \boxed{+ 3^2 - 3^2} + 4)}$ ***Quadratische Ergänzung***

$\mathbf{= 2[(x - 3)^2 - 5]}$ ***Anwendung der 2. Binomischen Formel***

$\mathbf{= 2(x - 3)^2 - 10 \Rightarrow T_{min} = -10}$ **für x = 3**

4. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Bei Gleichungen und Ungleichungen kann die Variable sowohl im Links- als auch im Rechtsterm auftreten.

Beispiele:

Linksterm		*Rechtsterm*
$7x - 1$	$=$	$3x + 5$
$2{,}5x + 3$	$<$	$4x$
6	$>$	$-3x + 4$

Die Regeln für das Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen werden deshalb verallgemeinert:

> Zu einer Gleichung bzw. Ungleichung erhält man eine äquivalente Gleichung bzw. Ungleichung, wenn man
>
> - auf beiden Seiten den **gleichen** Term addiert oder subtrahiert.
> - beide Seiten mit der **gleichen** von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder dividiert.
>
> Für Ungleichungen gilt das Inversionsgesetz!

5. Geometrische Ortslinien

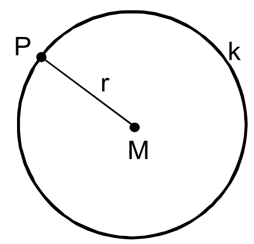
a) Kreis

Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, die von **einem Punkt die gleiche Entfernung** haben.

Kreislinie: $k(M; r) = \{P \mid \overline{PM} = r\}$

Kreisinneres: $\{P \mid \overline{PM} < r\}$

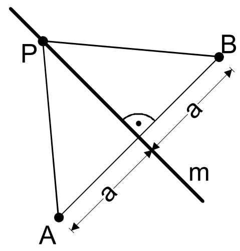
Kreisäußeres: $\{P \mid \overline{PM} > r\}$



b) Mittelsenkrechte

Die Mittelsenkrechte ist der geometrische Ort aller Punke, die von **zwei Punkten die gleiche Entfernung** haben.

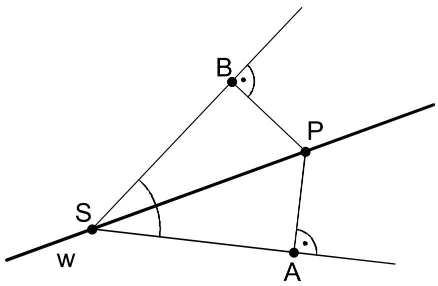
$m_{[AB]} = \{P \mid \overline{AP} = \overline{BP}\}$



c) Winkelhalbierende

Die Winkelhalbierende ist der geometrische Ort aller Punkte, die von **beiden Schenkeln eines Winkels den gleichen Abstand** haben.

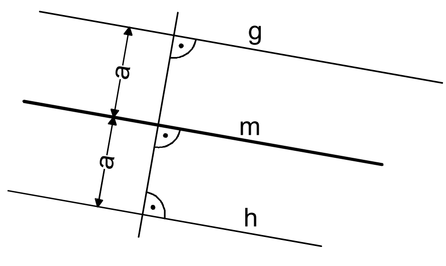
w = {P| d(P; [SA) = d(P; [SB)}, $SA \nparallel SB$



d) Mittelparallele

Die Mittelparallele zweier paralleler Geraden ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den **beiden Geraden den gleichen Abstand** haben.

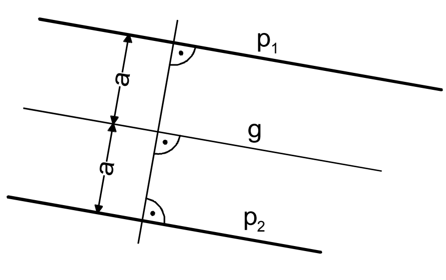
m = {P| d(P; g) = d(P; h)}, g || h



e) Parallelenpaar

Das Parallelenpaar zu einer Geraden ist der geometrische Ort aller Punkte, die von **einer Geraden den gleichen Abstand a** haben.

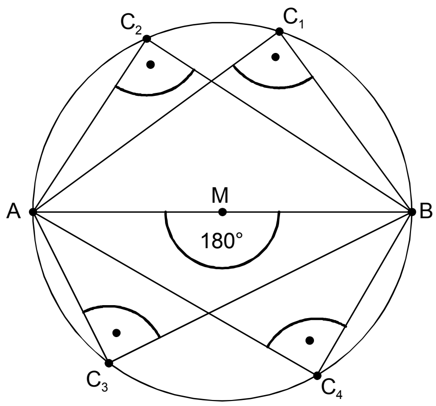
$p_1 \cup p_2 = \{ P \mid d(P; g) = a\}$



6. Winkel am Kreis

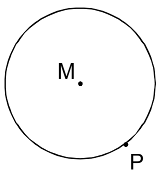
a) Thaleskreis

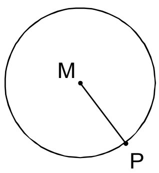
- Verbindet man die **Punkte C_n** des **Halbkreises** über einer Mittelsehne mit den Endpunkten A und B, so haben **alle Winkel AC_nB** bzw. **BC_nA** das Maß **90°**.
- Umgekehrt gilt: Hat der **Winkel ACB** bzw. **BCA** das Maß **90°**, liegt sein **Scheitel C** auf dem **Halbkreis** über der Mittelsehne [AB]



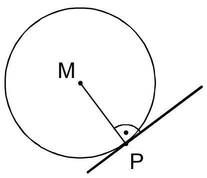
b) Tangentenkonstruktion

Fall1: Tangente im Berührpunkt P, der auf der Kreislinie k liegt.



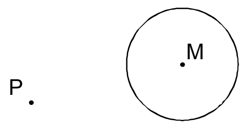


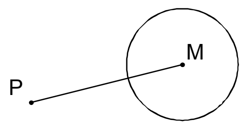
Zeichne die Strecke [MP] oder die Zentrale durch M und P.



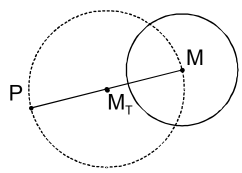
Zeichne die Senkrechte zur Strecke [MP] oder zur Zentrale durch M und P.

Fall 2: Tangenten von einem Punkt P aus an die Kreislinie k.

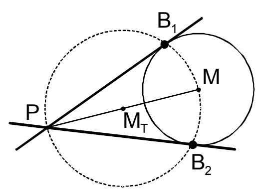




Zeichne die Strecke [MP].



Zeichne einen Kreis (Thaleskreis), dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Strecke [PM] ist.



Die Schnittpunkte der beiden Kreise bilden die Berührpunkte B_1 und B_2 der beiden Tangenten.

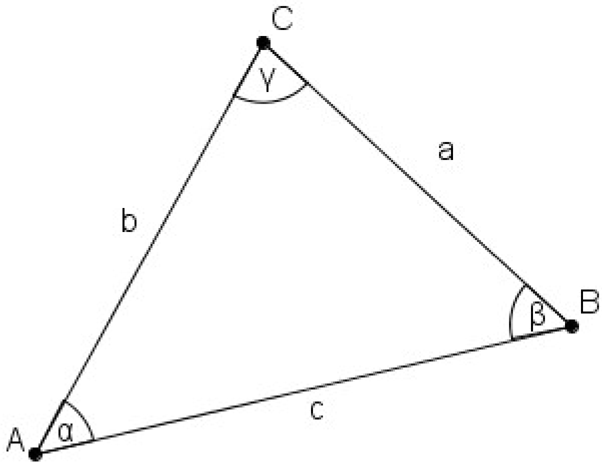
7. Dreiecke

a) Eigenschaften von Dreiecken

- Im Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber und umgekehrt (**Seiten-Winkel-Beziehung**).
- In jedem Dreieck ist die Länge einer Dreiecksseite kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden anderen Seitenlängen (**Dreiecksungleichung**).
- Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten ist der **Umkreismittelpunkt**, der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Dreiecksinnenwinkel der **Inkreismittelpunkt**.

b) Konstruktion von Dreiecken

Um kongruente (deckungsgleiche) Dreiecke konstruieren zu können, müssen sie in bestimmten Steiten und Winkeln übereinstimmen.

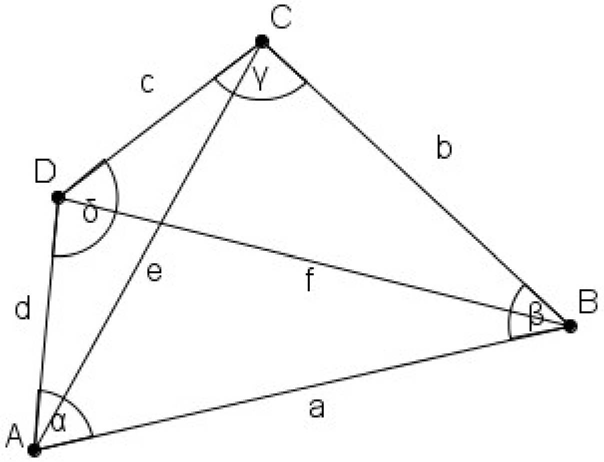


Dreiecke sind kongruent, wenn sie

- in drei Seiten übereinstimmen **(1. Kongruenzsatz: sss)**
- in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen **(2. Kongruenzsatz: sws)**
- in einer Seite und zwei entsprechenden Winkeln übereinstimmen **(3. Kongruenzsatz: wsw, sww).**
- in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren der beiden Seiten übereinstimmen **(4. Kongruenzsatz: sSw).**

8. Vierecke

a) Bezeichnungen

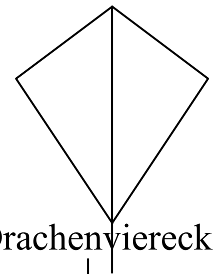


Seiten a, b, c, d

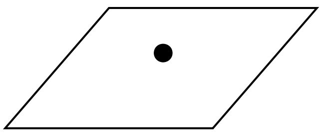
Winkel α, β, γ, δ

Diagonalen e, f

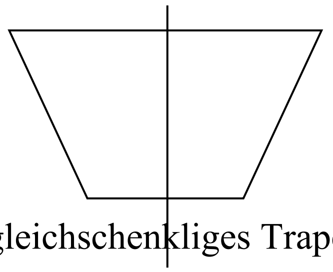
b) Symmetrische Vierecke



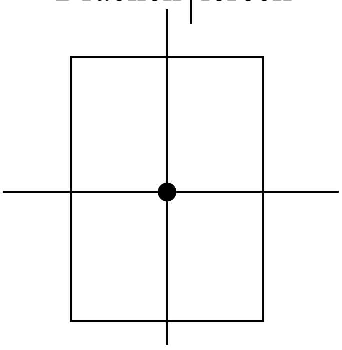
Drachenviereck



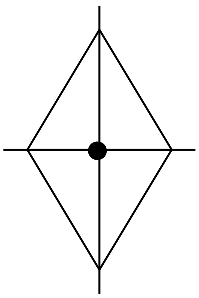
Parallelogramm



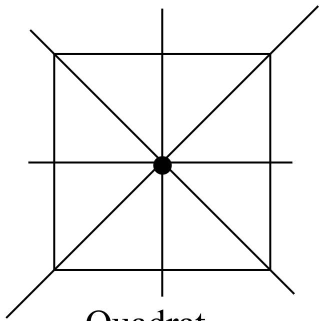
gleichschenkliges Trapez



Rechteck



Raute



Quadrat

9. Bruchterme und Bruchgleichungen

a) Bruchterme

Terme wie $\frac{4}{x}$, $\frac{1}{2y-3}$ oder $\frac{6x^2-3}{x(x+5)}$ heißen **Bruchterme,** wenn der Nenner mindestens eine Variable enthält**.**

Alle Zahlen der Grundmenge, für die der Nennerterm nicht Null ist, bilden die Definitionsmenge des Bruchterms.

b) Bruchgleichungen

Besteht eine Gleichung aus Bruchtermen, wird sie als **Bruchgleichung** bezeichnet.

Bruchgleichungen werden durch „**Über-Kreuz-Multiplizieren**" gelöst:

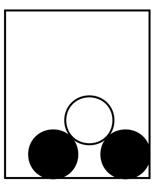
$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_3}{T_4} \quad \Leftrightarrow \quad T_1 \cdot T_4 = T_2 \cdot T_3}$$

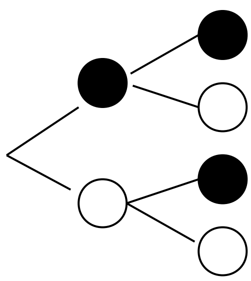
10. Ermitteln von Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Begriffe	*Beispiel: Werfen eines Würfels*
Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments nennt man **Ergebnisraum Ω** (lies: *omega*).	$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Fasst man Ergebnisse aus dem Ergebnisraum mit bestimmten Eigenschaften zu einer Teilmenge zusammen, so nennt man diese Teilmenge **Ereignis E**.	E : Die gewürfelte Zahl ist ungerade. $E = \{1; 3; 5\}$
Kann ein Ereignis E nie eintreten, so nennt man es **unmögliches Ereignis**.	E : Die gewürfelte Zahl ist 8. $E = \emptyset$
Tritt ein Ereignis E immer ein, so nennt man es **sicheres Ereignis**.	E: Die gewürfelte Zahl ist größer gleich 1 und kleiner gleich 6. $E = \Omega$
Die Ergebnisse aus dem Ergebnisraum, die nicht zum Ereignis E gehören, fasst man zum **Gegenereignis $\overline{E}$** von E zusammen.	E: Die gewürfelte Zahl ist gerade. $\overline{E}$: Die gewürfelte Zahl ist ungerade.

Zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten eines zusammengesetzten Laplace-Experiments wird ein **Baumdiagramm** verwendet, mit dem alle möglichen Ergebnisse dargestellt werden. Durch Abzählen der günstigen Ereignisse wird die Wahrscheinlichkeit bestimmt.

Beispiel: Ziehen von zwei Kugeln mit Zurücklegen





E = Ziehen von zwei unterschiedlichen Kugeln.

Zwei günstige Ereignisse: schwarz/weiß, weiß/schwarz

Wahrscheinlichkeit $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$