1. Termumformungen

Terme wie 4x + (2 + x) oder (3 - x) – 2x heißen **Summenterme.**

a) Addition und Subtraktion von Summentermen

Steht ein **Plus**zeichen vor einer Klammer, so kann dieses weggelassen werden.

$$\boxed{a + (b + c) = a + b + c}$$

Steht ein **Minus**zeichen vor einer Klammer, so ändert man die Vorzeichen der Summanden in der Klammer und addiert sie.

$$\boxed{\begin{aligned} a - (b + c) &= a + (-b) + (-c) \\ &= a - b - c \end{aligned}}$$

b) Multiplikation von Summentermen

Jeder Summand der ersten Summe wird mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert; die dabei entstehenden Produkte werden addiert.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

c) Ausmultiplizieren und Faktorisieren

$$\text{Summenterm} \quad \underset{\textbf{Ausmultiplizieren}}{\overset{\textbf{Faktorisieren}}{\rightleftarrows}} \quad \text{Produktterm}$$

2. Die Binomischen Formeln

Für alle a, b $\in \mathbb{Q}$ gilt:

1. Binomische Formel	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binomische Formel	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Binomische Formel	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

3. Extremwerte

Für Terme der Form $\mathbf{T(x) = a(x + t)^2 + s}$ mit a, s, t $\in \mathbb{Q}$, a $\neq$ 0, gilt:

	a > 0	a < 0
Art des Extremwerts	Minimum	Maximum
Extremwert	$T_{min} = s$	$T_{max} = s$
Belegung von x	x = -t	x = -t

Extremwertbestimmung durch quadratische Ergänzung

Durch Anwendung der binomischen Formeln können quadratische Terme so umgeformt werden, dass nach oben genannten Regeln der Extremwert des Terms bestimmt werden kann.

Beispiel:

$\mathbf{T(x) = 2x^2 - 12x + 8}$

$\mathbf{= 2(x^2 - 6x + 4)}$ ***Faktor vor x² ausklammern***

$\mathbf{= 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 \boxed{+ 3^2 - 3^2} + 4)}$ ***Quadratische Ergänzung***

$\mathbf{= 2[(x - 3)^2 - 5]}$ ***Anwendung der 2. Binomischen Formel***

$\mathbf{= 2(x - 3)^2 - 10 \quad \Rightarrow \quad T_{min} = -10}$ **für x = 3**

4. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Bei Gleichungen und Ungleichungen kann die Variable sowohl im Links- als auch im Rechtsterm auftreten.

Beispiele:

Linksterm		*Rechtsterm*
$7x - 1$	$=$	$3x + 5$
$2{,}5x + 3$	$<$	$4x$
6	$>$	$-3x + 4$

Die Regeln für das Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen werden deshalb verallgemeinert:

Zu einer Gleichung bzw. Ungleichung erhält man eine äquivalente Gleichung bzw. Ungleichung, wenn man

- auf beiden Seiten den **gleichen** Term addiert oder subtrahiert.
- beide Seiten mit der **gleichen** von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder dividiert.

Für Ungleichungen gilt das Inversionsgesetz!

5. Verknüpfung von Linearen Gleichungen und Ungleichungen

a) Verknüpfung mit „und zugleich“ ($\wedge$):

Werden zwei lineare Gleichungen oder Ungleichungen mit den Lösungsmengen $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ durch das Zeichen „$\wedge$“ (und zugleich) verknüpft, gilt für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Verknüpfung:

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ (sprich: $\mathbb{L}$ ist die **Schnittmenge** von $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$.)

b) Verknüpfung mit „oder auch“ ($\vee$):

Werden zwei lineare Gleichungen oder Ungleichungen mit den Lösungsmengen $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ durch das Zeichen „$\vee$“ (oder auch) verknüpft, gilt für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Verknüpfung:

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$ (sprich: $\mathbb{L}$ ist die **Vereinigungsmenge** von $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$.)

6. Relation und Funktion

a) Relation

Die Menge, die durch Bildung aller möglichen geordneten Zahlenpaaren aus Elementen zweier Mengen entsteht, heißt **Produktmenge**.

$$\begin{aligned} M_1 \times M_2 = \{&(x_1|\, y_1),\ (x_1|\, y_2),\ \{(x_1|\, y_3),\ \ldots, \\ &(x_2|\, y_1),\ (x_2|\, y_2),\ \{(x_2|\, y_3),\ \ldots, \\ &(x_3|\, y_1),\ (x_3|\, y_2),\ \{(x_3|\, y_3),\ \ldots\ \} \end{aligned}$$

sprich: M_1 Kreuz M_2

Durch eine **Relationsvorschrift**, die bestimmte Zahlenpaare auswählt, wird zwischen zwei Mengen M_1 und M_2 eine **Relation R** festgelegt. Die Relation R ist eine Teilmenge der Produktmenge $M_1 \times M_2$.
Die Menge aller ersten Komponenten der Zahlenpaare einer Relation bildet die **Definitionsmenge $\mathbb{D}(x)$**, die Menge aller zweiten Komponenten bildet die **Wertemenge $\mathbb{W}(y)$** der Relation.

b) Funktion

Eine Relation heißt **Funktion**, wenn jedem Element aus der Definitionsmenge $\mathbb{D}(x)$ jeweils genau ein Element aus der Wertemenge $\mathbb{W}(y)$ zugeordnet ist.

Eine Gleichung der Form **$y = f(x)$** legt eine Funktion fest. Sie heißt Funktionsgleichung; der Term $f(x)$ heißt **Funktionsterm**. Die Zahlenpaare der Funktion im Koordinatensystem bilden den **Graphen der Funktion**.

Die Belegung von x, für die $f(x) = 0$ gilt, heißt **Nullstelle**. Der Graph der Funktion hat hier einen Schnittpunkt mit der x - Achse.

7. Lineare Funktionen

Eine Funktion f mit der Gleichung **y = mx + t** und m, t $\in$ $\mathbb{Q}$ ist bezüglich $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ eine **lineare Funktion**.

Es gilt:

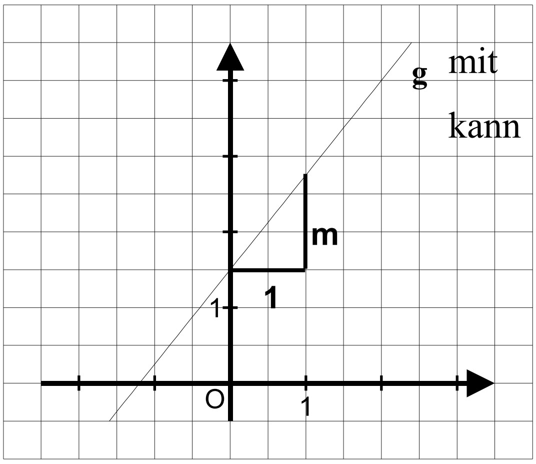
- Definitionsmenge $\mathbb{D}(x) = \mathbb{Q}$ *(Für die Variable x können alle Elemente der Menge $\mathbb{Q}$ eingesetzt werden.)*
- Wertemenge □(y) = $\mathbb{Q}$ *(Als Funktionswert erhält man alle Elemente der Menge $\mathbb{Q}$.)*
- Für den Graphen g der Funktion f ist **m** die **Steigung**.
- **t** heißt **y-Achsenabschnitt**. Für t = 0 erhält man Funktionen, deren Graphen **Ursprungsgeraden** heißen.
- Verläuft eine Gerade mit der Steigung m durch einen Punkt $S(x_s| y_s)$, so kann die Gleichung der Geraden mit $y = m(x - x_s) + y_s$ angegeben werden. Diese Form heißt **Punktsteigungsform**.

Funktionsgleichung	**Graph**
Normalform der Geradengleichung: y = mx + t m, t $\in \mathbb{Q}$	Gerade mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt t
y = mx m $\in \mathbb{Q}$	Ursprungsgerade mit der Steigung m
y = t t $\in \mathbb{Q}$	Parallele zur x-Achse mit dem y-Achsenabschnitt t
y = 0	x-Achse
Punktsteigungsform : $y = m(x - x_s) + y_s$ $m, x_s, y_s \in \mathbb{Q}$	Gerade mit der Steigung m durch den Punkt $S(x_s\| y_s)$
allgemeine Geradengleichung : ax + by + c = 0 a, b, c $\in \mathbb{Q}$, b $\neq$ 0	Gerade mit der Steigung $-\frac{a}{b}$ und dem y-Achsenabschnitt $-\frac{c}{b}$

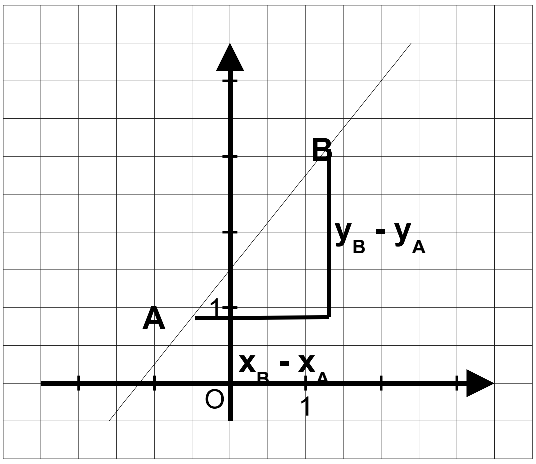
8. Eigenschaften linearer Funktionen

a) Die Steigung

- Für die Steigung m der Geraden g mit der Funktionsgleichung $y = mx + t$ kann ein Steigungsdreieck mit den Seitenlängen m und 1 festgelegt werden.



- Liegen die Punkte $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ auf der Geraden g, so kann der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ festgelegt werden. Es gilt für die Steigung $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



- Geraden g_1 und g_2, die zueinander senkrecht liegen, heißen **orthogonal**. Für ihre Steigungen m_1 und m_2 gilt: $\mathbf{m_1 \cdot m_2 = -1}$.

b) Geradenschar und Geradenbüschel

- Geraden mit gleicher Steigung m aber verschiedenen y-Achsenabschnitten $t \in \mathbb{Q}$ sind zueinander parallel. Sie bilden eine **Parallelenschar g(t).**
- Geraden mit einem gemeinsamen Punkt $A(x_A|y_A)$ aber verschiedenen Steigungen $m \in \mathbb{Q}$ bilden ein **Geradenbüschel g(m)** mit dem **Büschelpunkt A**.

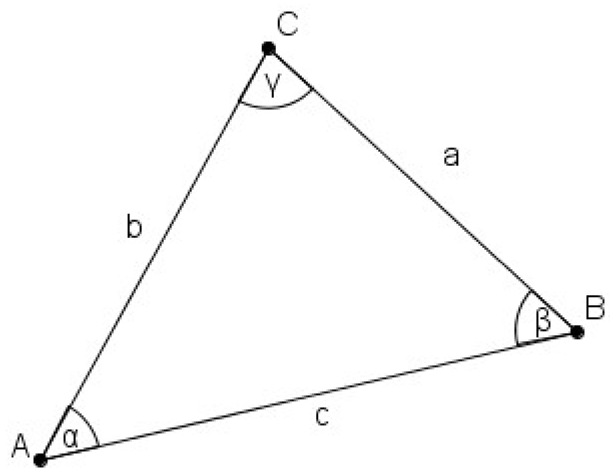
9. Dreiecke

a) Eigenschaften von Dreiecken

- Im Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber und umgekehrt (**Seiten-Winkel-Beziehung**).
- In jedem Dreieck ist die Länge einer Dreiecksseite kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden anderen Seitenlängen (**Dreiecksungleichung**).

b) Konstruktion von Dreiecken

Um kongruente (deckungsgleiche) Dreiecke konstruieren zu können, müssen sie in bestimmten Steiten und Winkeln übereinstimmen.

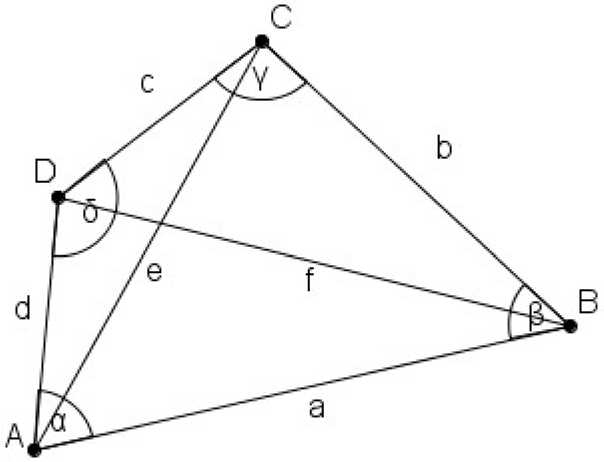


Dreiecke sind kongruent, wenn sie

- in drei Seiten übereinstimmen **(1. Kongruenzsatz: sss)**
- in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen **(2. Kongruenzsatz: sws)**
- in einer Seite und zwei entsprechenden Winkeln übereinstimmen **(3. Kongruenzsatz: wsw, sww).**
- in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren der beiden Seiten übereinstimmen **(4. Kongruenzsatz: sSw).**

10. Vierecke

a) Bezeichnungen

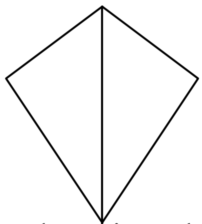


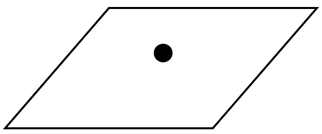
Seiten a, b, c, d

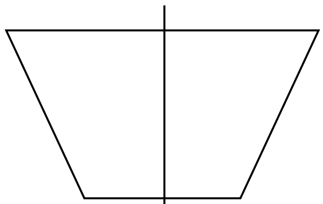
Winkel α, β, γ, δ

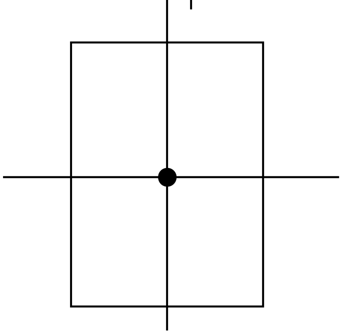
Diagonalen e, f

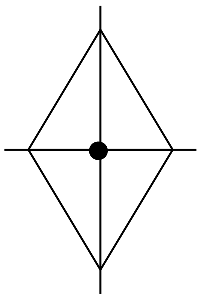
b) Symmetrische Vierecke

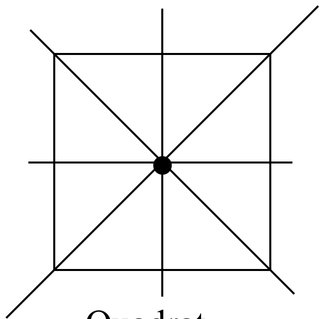

Drachenviereck


Parallelogramm


gleichschenkliges Trapez


Rechteck


Raute


Quadrat

11. Bruchterme und Bruchgleichungen

Terme wie $\frac{4}{x}$, $\frac{1}{2y-3}$ oder $\frac{6x^2-3}{x(x+5)}$ heißen **Bruchterme,** wenn der Nenner mindestens eine Variable enthält**.**

Alle Zahlen der Grundmenge, für die der Nennerterm nicht Null ist, bilden die Definitionsmenge des Bruchterms.

a) Kürzen und Erweitern von Bruchtermen

$$\frac{T_1 \cdot T_3}{T_2 \cdot T_3} \underset{\text{Erweitern}}{\overset{\text{Kürzen}}{=}} \frac{T_1}{T_2}$$

b) Addition und Subtraktion von Bruchtermen

$$\frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1 + T_2}{T_3} \quad \text{und} \quad \frac{T_1}{T_3} - \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1 - T_2}{T_3}$$

Ungleichnamige Bruchterme müssen zuvor durch Erweitern des Nennerterms gleichnamig gemacht werden.

c) Multiplikation und Division von Bruchtermen

$$\frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{T_2}{T_4} = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_3 \cdot T_4} \quad \text{und} \quad \frac{T_1}{T_3} : \frac{T_2}{T_4} = \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{T_4}{T_2} = \frac{T_1 \cdot T_4}{T_3 \cdot T_2}$$

d) Lösen von Bruchgleichungen

Besteht eine Gleichung aus Bruchtermen, wird sie als **Bruchgleichung** bezeichnet.
Bruchgleichungen werden durch „**Über-Kreuz-Multiplizieren**“ gelöst:

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_3}{T_4} \Leftrightarrow T_1 \cdot T_4 = T_2 \cdot T_3}$$

12. Grundlagen der Raumgeometrie

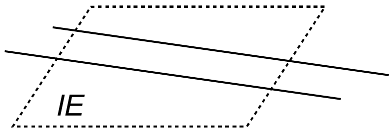
a) Ebenen

Eine Ebene IE ist bestimmt

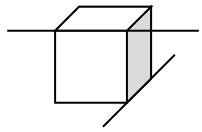
- durch drei Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen.
- durch eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt.
- durch zwei sich schneidende Geraden.
- durch zwei parallele Geraden.

b) Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen

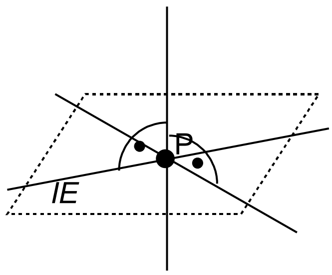
- Geraden, die in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, sind parallele Geraden.



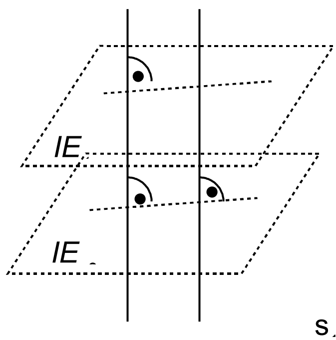
- Geraden, die nicht in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, sind **windschiefe Geraden**.



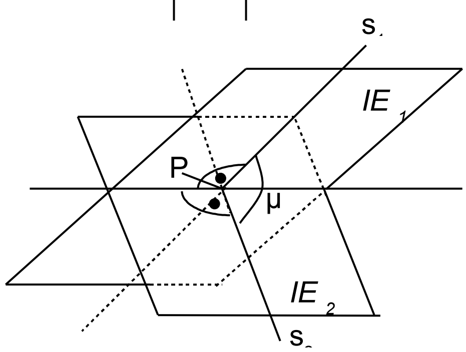
- Steht eine Gerade auf einer Ebene im Punkt P senkrecht, so steht sie auf allen Geraden der Ebene, die durch P verlaufen, senkrecht.
- Steht eine Gerade auf zwei, sich schneidenden Geraden im Schnittpunkt P senkrecht, so steht sie auf der Ebene, die durch die beiden Geraden bestimmt ist, senkrecht.



- Geraden, die gemeinsam auf einer Ebene senkrecht stehen, sind parallel.
- Ebenen mit einer gemeinsamen Senkrechten sind parallel.



- Die zu der Schnittgeraden g zweier Ebenen senkrechten Geraden s_1 und s_2 schneiden sich im Punkt P. Die beiden Geraden s_1 und s_2 schließen den Neigungswinkel mit dem Maß μ der beiden Ebenen ein.



13. Schrägbilder

Das Raumbild von Körpern wird auch **Schrägbild** genannt.

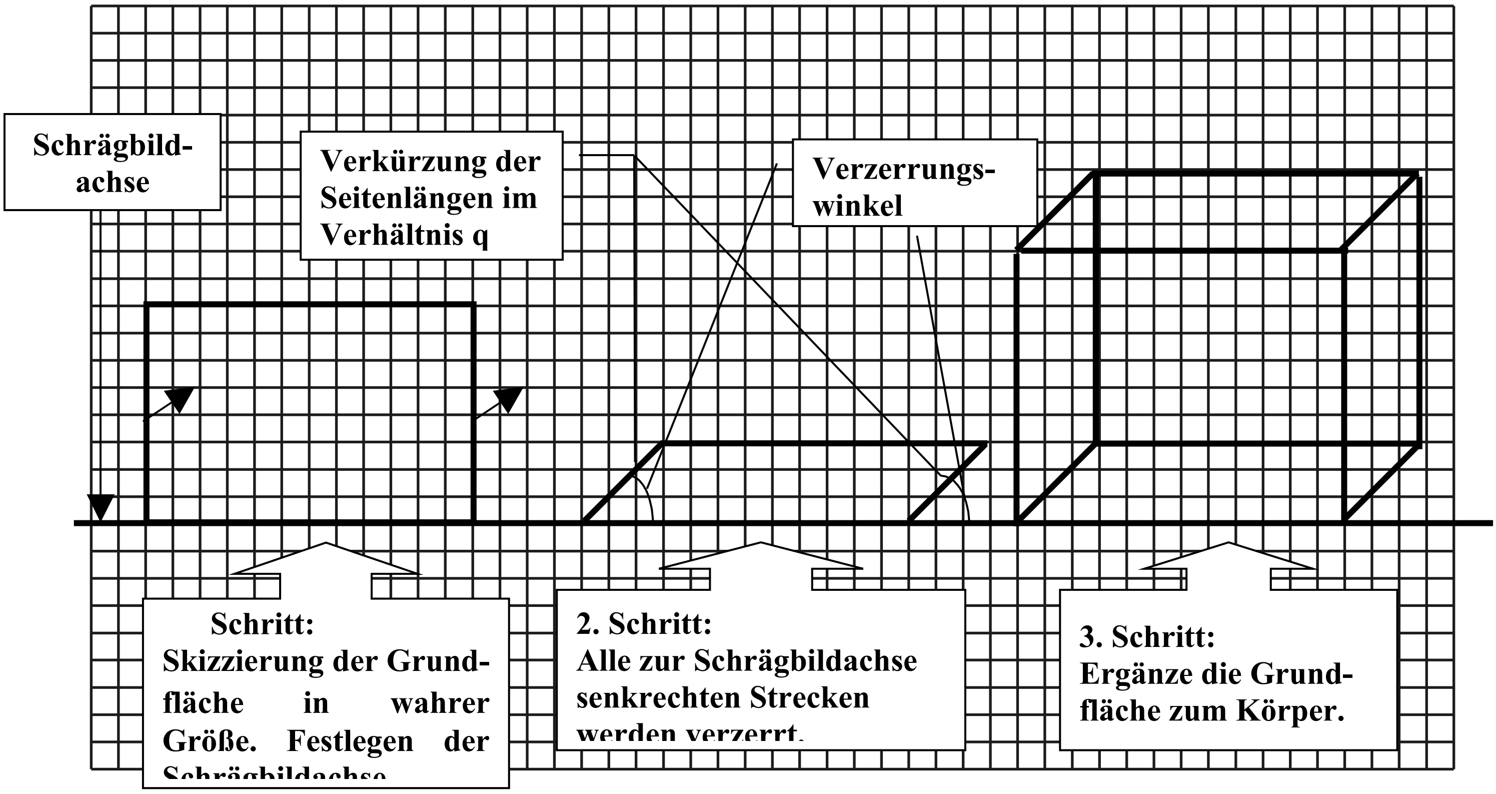
Für die Konstruktion des Schrägbildes muss

- eine **Schrägbildachse**
- ein **Verkürzungsverhältnis q**
- ein **Verzerrungswinkel** mit dem Maß **ω**

festgelegt werden.

Beachte:
Alle Strecken und Winkel, die in zur Zeichenebene parallelen Ebenen liegen, können in wahrer Größe eingezeichnet werden.

Beispiel:

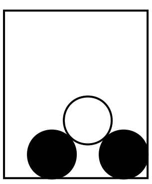


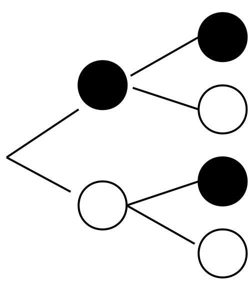
14. Ermitteln von Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Begriffe	*Beispiel: Werfen eines Würfels*
Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments nennt man **Ergebnisraum Ω** (lies: *omega*).	Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6}
Fasst man Ergebnisse aus dem Ergebnisraum mit bestimmten Eigenschaften zu einer Teilmenge zusammen, so nennt man diese Teilmenge **Ereignis E**.	E : Die gewürfelte Zahl ist ungerade. E = {1; 3; 5}
Kann ein Ereignis E nie eintreten, so nennt man es **unmögliches Ereignis**.	E : Die gewürfelte Zahl ist 8. E = ∅
Tritt ein Ereignis E immer ein, so nennt man es **sicheres Ereignis**.	E: Die gewürfelte Zahl ist größer gleich 1 und kleiner gleich 6. E = Ω
Die Ergebnisse aus dem Ergebnisraum, die nicht zum Ereignis E gehören, fasst man zum **Gegenereignis $\overline{E}$** von E zusammen.	E: Die gewürfelte Zahl ist gerade. $\overline{E}$: Die gewürfelte Zahl ist ungerade.

Zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten eines zusammengesetzten Laplace-Experiments wird ein **Baumdiagramm** verwendet, mit dem alle möglichen Ergebnisse dargestellt werden. Durch Abzählen der günstigen Ereignisse wird die Wahrscheinlichkeit bestimmt.

Beispiel: Ziehen von zwei Kugeln mit Zurücklegen





E = Ziehen von zwei unterschiedlichen Kugeln.

Zwei günstige Ereignisse: schwarz/weiß, weiß/schwarz

Wahrscheinlichkeit $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$