1. Bruchrechnung

a) Formveränderung von Brüchen

Erweitern heißt Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl multiplizieren: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

Kürzen heißt Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl dividieren: $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$

Beachte: Man darf mit 0 weder erweitern noch kürzen.

b) Addition und Subtraktion von Brüchen

Regel:
- Man bestimmt den Hauptnenner und macht die Brüche gleichnamig (= gleicher Nenner).
- Man addiert bzw. subtrahiert die **Zähler**.
- Man behält den gemeinsamen Nenner bei.

c) Multiplikation von Brüchen

Regel: **Bruch mal Bruch**
- $\frac{\text{Zähler} \cdot \text{Zähler}}{\text{Nenner} \cdot \text{Nenner}}$
- Gemischte Zahlen werden vorher in unechte Brüche umgewandelt, gekürzt und dann multipliziert.

Bruch mal ganze Zahl
- Man verwandelt die ganze Zahl in einen Bruch mit dem Nenner 1 und verfährt nach obiger Regel. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b}$

d) Division von Brüchen

Regel:
- Man bildet den Kehrwert des zweiten Bruches und multipliziert anschließend die beiden Brüche.

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ ***Doppelbrüche:*** $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

2. Umwandeln von Brüchen

a) Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen

Regel:
- Man wandelt einen gemeinen Bruch in einen Dezimalzahl um, indem man den **Bruchstrich** durch ein **Divisionszeichen** ersetzt und den Zähler durch den Nenner dividiert.

  z. B.: $\frac{7}{8} = 7:8 = 0{,}875$ $\qquad 1\frac{5}{9} = \frac{14}{9} = 1{,}5555... = 1{,}\overline{5}$

b) Umwandlung von Dezimalzahlen in Brüche

Endliche Dezimalzahlen

Regel:
- Im Zähler steht die Zahl aus allen Dezimalstellen.
- Im Nenner steht die entsprechende Stufenzahl.
- Die Ganzen werden gesondert umgewandelt.

  z. B.: $0{,}16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$ $\qquad 3{,}41 = 3\frac{41}{100} = \frac{341}{100}$

Unendlich periodische Dezimalzahlen

Regel:
- Im Zähler steht die Periode.
- Im Nenner steht eine Zahl, die aus so vielen Ziffern 9 besteht wie die Länge der Periode vorgibt.

  z. B.: $0{,}\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $\qquad 0{,}\overline{002} = \frac{2}{999}$

(Die Regel gilt nur, wenn die Periode sofort nach dem Komma beginnt!)

c) Runden von Dezimalzahlen

Regel: Bei sehr langen oder unendlichen Dezimalzahlen genügt häufig ein gerundeter Näherungswert der Zahl. Dafür gilt folgendes:

Abrunden: Die zu rundende Ziffer bleibt unverändert, wenn eine der Ziffern 0 bis 4 folgt.

Aufrunden: Die zu rundende Ziffer wird um 1 erhöht, wenn eine der Ziffern 5 bis 9 folgt.

Vor dem Runden ist festzustellen, auf welche Stelle gerundet werden soll. Die nächstfolgende Ziffer ist die entscheidende.

z. B. 123,8 ≈ 124 (auf Ganze gerundet)

6,983 ≈ 6,98 (auf Hundertstel gerundet)

3. Rechnen mit Dezimalzahlen

a) Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen

Regel:
- Man bringt die Dezimalzahlen durch Anhängen von Endnullen auf gleich viele Dezimalen.
- Man addiert bzw. subtrahiert Ziffern mit gleichem Stellenwert.

z. B.: $23,4+2,345-0,71=23,400+2,345-0,710=25,035$

b) Multiplikation von Dezimalzahlen

Regel:
- Man multipliziert die beiden Dezimalzahlen zunächst **ohne** Komma.
- Man setzt das Komma so, dass das Ergebnis so viele Dezimalstellen besitzt wie beide Faktoren zusammen.

z. B.: $4,5\cdot 0,3=1,35$

c) Division von Dezimalzahlen

Regel:
- Man verschiebt das Komma bei Dividend und Divisor um gleich viele Stellen so weit nach rechts bis der **Divisor** kommafrei ist.
- Man dividiert wie mit natürlichen Zahlen.
- Man setzt das Komma im Ergebnis, sobald man die Kommastelle beim Dividenden überschreitet.

z.B. 4,97 : 3,5 = 49,7 : 35 = 1,42

```
- 35
  147
- 140
    70
  - 70
     0
```

4. Terme

a) **Definition**

- Jede Zahl — z. B.: 5; 0,12; $1\frac{2}{7}$; ...
- Jede Variable — z. B.: a; x; y; ...
- Jede sinnvolle Verknüpfung aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bezeichnet man als **Term**. — z.B.: $5+0{,}3\cdot 2{,}4$; $3\cdot x-7$; x^2-25; ...

<u>Jeder Term, der eine Variable enthält, besitzt eine Grundmenge</u> G <u>für die Variable.</u>

b) **Darstellungsarten von Termen**

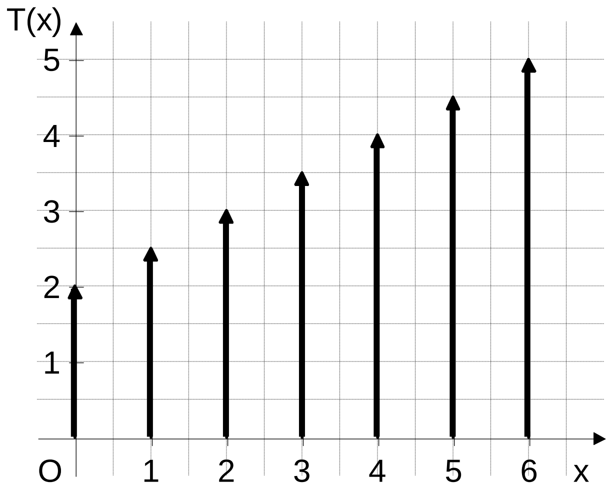
Wenn man für die Variable des Terms Zahlen der Grundmenge einsetzt, erhält man jeweils den dazugehörigen Termwert.
Terme kann man in numerischen und graphischen Wertetabellen darstellen:

Beispiel: **T(x) = 0,5 · x + 2** ***G = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6}***

Numerische Wertetabelle

x	0	1	2	3	4	5	6
$0{,}5\cdot x+2$	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5

Graphische Wertetabelle



c) **Äquivalente Terme**

Terme sind **äquivalent** (gleichwertig), wenn sie bei **<u>allen</u> Einsetzungen aus der Grundmenge G jeweils die gleichen Termwerte haben**.

5. Lösen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen

a) **Äquivalenz von Gleichungen**

Gleichungen (Ungleichungen), die bei **gleicher Grundmenge dieselbe Lösungsmenge** besitzen, heißen **äquivalent**.

Beispiel: **(5 + x) · 4 = 80** ist äquivalent zu **20 + 4 · x = 80** in G = $\mathbb{Q}_0^+$,

da beide Gleichungen dieselbe Lösungsmenge L = {15} haben.

b) **Äquivalenzumformungen**

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf **<u>beiden Seiten</u>** die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert
- **<u>beide Seiten</u>** mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder dividiert.

Eine derartige Umformung heißt **Äquivalenzumformung**.

Beispiele: G = $\mathbb{Q}_0^+$

1.
$$2 \cdot x = 5 \quad |:2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot x : 2 = 5 : 2$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 2{,}5$$

L = {2,5} , weil 2,5 $\in \mathbb{Q}_0^+$

G = $\mathbb{N}$

2.
$$x - 5{,}8 = 2{,}3 \quad |+ 5{,}8$$
$$\Leftrightarrow \quad x - 5{,}8 + 5{,}8 = 2{,}3 + 5{,}8$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 8{,}1$$

L = { } , weil 8,1 $\notin \mathbb{N}$

Zur Probe setzt man das Lösungselement ein und überzeugt sich, dass eine wahre Aussage entsteht!

2 · 2,5 = 5 (wahre Aussage)

6. Direkte Proportionalität

Entspricht bei einer Zuordnung von Größen das n-fache der einen Größe dem n-fachen der anderen Größe, so heißt diese Zuordnung **direkte Proportionalität**.

Eigenschaften:

- Alle Größenpaare (A|B) einer direkten Proportionalität sind **quotientengleich**, d.h. wenn man eine Größe durch die andere dividiert, erhält man jeweils den gleichen Quotientenwert.
- Der konstante Quotient k = $\frac{A}{B}$ heißt **Proportionalitätsfaktor**.

Beispiel:

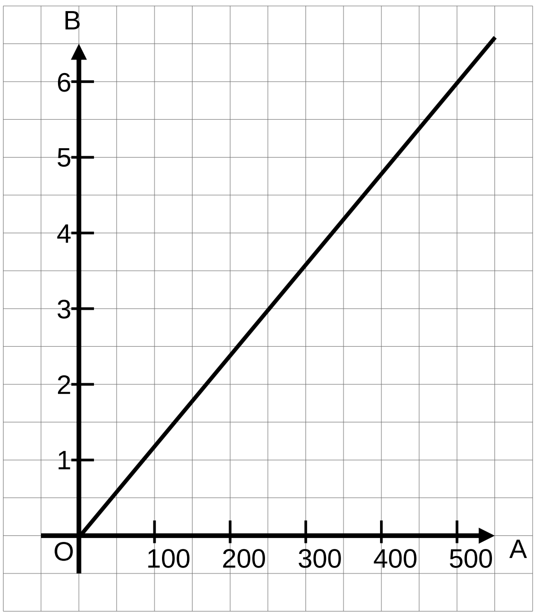
$\cdot 4$ $:2$

A in g	50	100	200	250	500
B in €	0,60	1,20	2,40	3,00	6,00
		$\cdot 4$			$:2$
$\frac{B}{A}$ in $\frac{€}{g}$	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012

Man sagt:

„Die beiden Größen A und B sind **zueinander direkt proportional.**“ (**A ~ B**)

- Der Graph einer direkten Proportionalität ist eine **Ursprungshalbgerade**.



7. Prozentrechnung

Bruchteile gibt man oft in **Prozent** („**von Hundert**“) an. Dabei gilt:

$$\frac{1}{100} = 1\ \% \qquad \frac{p}{100} = p\ \%$$

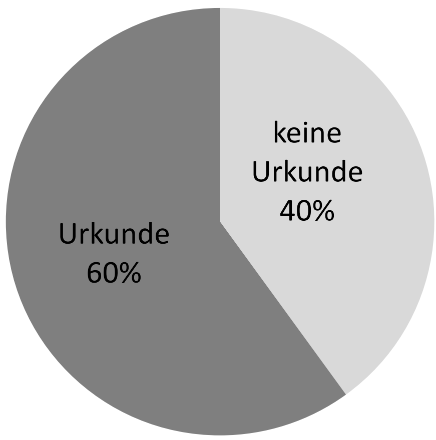
Beispiele: a) $\frac{19}{100} = 19\ \%$ b) $\frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\ \%$ c) $\frac{6}{200} = \frac{3}{100} = 3\ \%$

a) Begriffe der Prozentrechnung

Von $\boxed{\text{135 Schülerinnen}}$ erhielten $\boxed{\textbf{60}}$ %, also $\boxed{\text{81 Schülerinnen}}$ Urkunden.

Grundwert (GW) **Prozentsatz (p)** **Prozentwert (PW)**

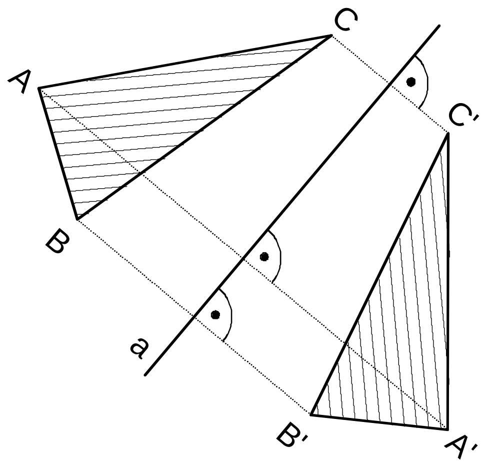
Darstellung im Kreisdiagramm:



b) Berechnungen

Die **Zahlen- bzw. Größenpaare** bei der Prozentrechnung sind **quotientengleich**. Es gilt: $\boxed{\frac{\text{Prozentwert (PW)}}{\text{Prozentsatz (p)}} = \frac{\text{Grundwert (GW)}}{100}}$ oder $\boxed{\frac{\text{Prozentsatz (p)}}{\text{Prozentwert (PW)}} = \frac{100}{\text{Grundwert (GW)}}}$	Mit Hilfe von **Äquivalenzumformungen** erhält man: $\boxed{\text{Prozentwert (PW)} = \frac{\text{Grundwert (GW)} \cdot \text{Prozentsatz (p)}}{100}}$ $\boxed{\text{Grundwert (GW)} = \frac{\text{Prozentwert (PW)} \cdot 100}{\text{Prozentsatz (p)}}}$ $\boxed{\text{Prozentsatz (p)} = \frac{\text{Prozentwert (PW)} \cdot 100}{\text{Grundwert (GW)}}}$

8. Die Achsenspiegelung



Wird einer **Urfigur** (ΔABC) durch Spiegelung an einer Geraden a umkehrbar eindeutig genau eine **Bildfigur** (ΔA'C'B') zugeordnet, so handelt es sich bei der Abbildung um eine **Achsenspiegelung**.

Die Gerade a heißt **Spiegelachse**.

Kurzschreibweise: $\Delta ABC \xmapsto{a} \Delta A'B'C'$

Urfigur und Bildfigur liegen **symmetrisch** zur Spiegelachse a.

Die Punkte A, B oder C heißen **Urpunkte**, die Punkte A', B' oder C' **Bildpunkte**.

Eigenschaften: $P \xmapsto{g} P'$

- Bei allen Achsenspiegelungen schneidet die Verbindungsstrecke von Urpunkt P und Bildpunkt P' die Spiegelachse unter einem **rechten Winkel** und sie wird von ihr **halbiert**.
- Bei allen Achsenspiegelungen ist nur die Spiegelachse **Fixpunktgerade**. Alle Punkte auf der Spiegelachse sind also **Fixpunkte**.
- Alle Senkrechten zur Spiegelachse und die Spiegelachse selbst sind **Fixgeraden**.
- Alle Achsenspiegelungen sind **längen-** und **winkeltreu.**
- Alle Achsenspiegelungen sind **geraden-, parallelen-** und **kreistreu**.

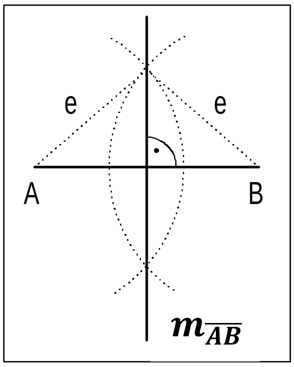
Die Achsenspiegelung ist eine Kongruenzabbildung.

9. Grundkonstruktionen:

Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Senkrechte/Lot

a) **Mittelsenkrechte $m_{\overline{AB}}$ zur Strecke $\overline{\mathbf{AB}}$**

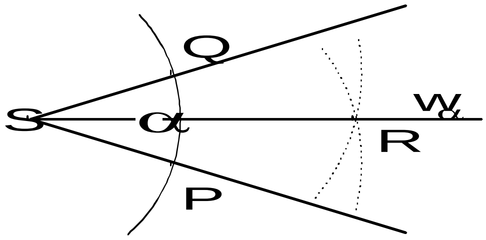
- Zeichne um A und B Kreise mit dem gleichen Radius r, wobei gilt: r > $|\overline{\mathbf{AB}}|$
- Zeichne eine Gerade durch die beiden Schnittpunkte.



<u>Merke</u>: Alle Punkte der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{\mathbf{AB}}$ sind von den Punkten A und B gleichweit entfernt. Beispiel: Strecken e.

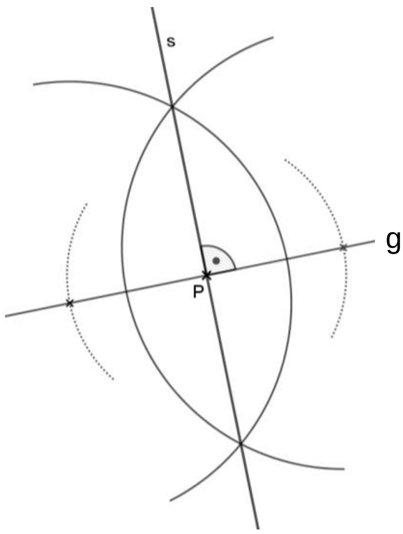
b) **Winkelhalbierende w_α**

- Zeichne um den Scheitel des Winkels einen Kreis. Dieser schneidet die Schenkel in den Punkten P und Q.
- Zeichne um P und Q je einen Kreis mit dem gleichen Radius r.
- Verbinde den Schnittpunkt R der Kreise mit dem Scheitel S.

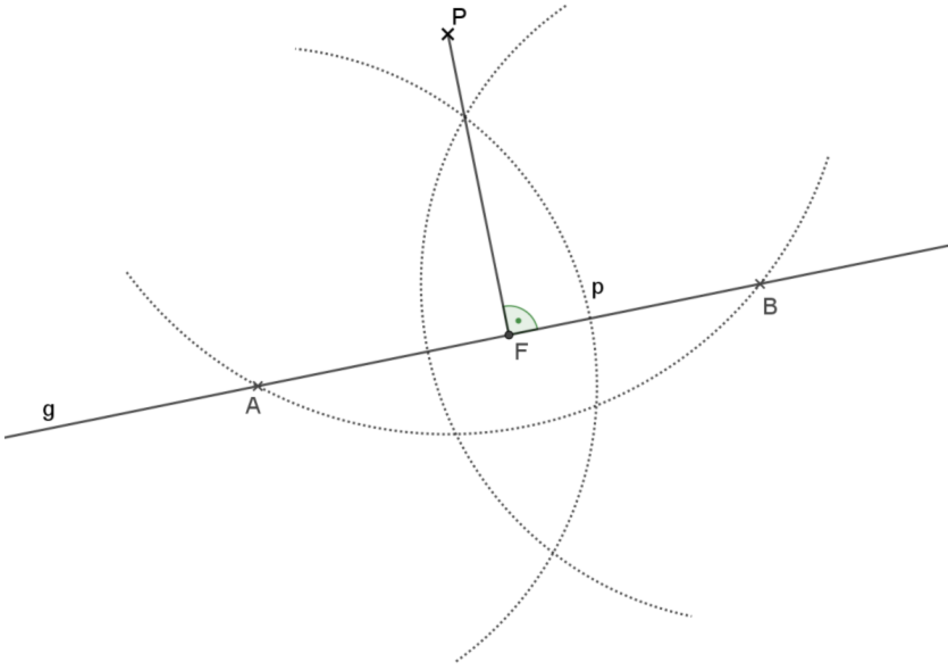


c) **Senkrechte s (zur Geraden g durch den Punkt P)**

- Markiere auf der Geraden g zwei Punkte, die von P gleich weit entfernt sind, indem du um P einen Kreis mit geeignetem Radius zeichnest.
- Für diese beiden Schnittpunkte konstruierst du die Mittelsenkrechte (siehe oben). Sie ist dann die Senkrechte s zur Geraden g durch den Punkt P.



d) **Lot (von einem Punkt P auf eine Gerade g)**

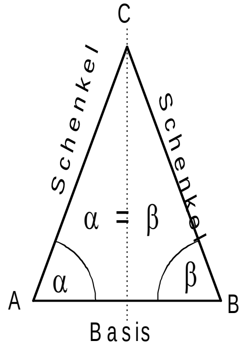


- Zeichne um P einen Kreis mit genügend großem Radius, so dass du auf der Geraden g zwei Schnittpunkte A und B festlegen kannst.
- Für diese beiden Schnittpunkte A und B konstruierst du die Mittelsenkrechte (siehe oben). Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit der Geraden g ist der Lotfußpunkt F.
- Verbinde den Punkt P und den Lotfußpunkt F und du erhältst das Lot vom Punkt P zur Geraden g.

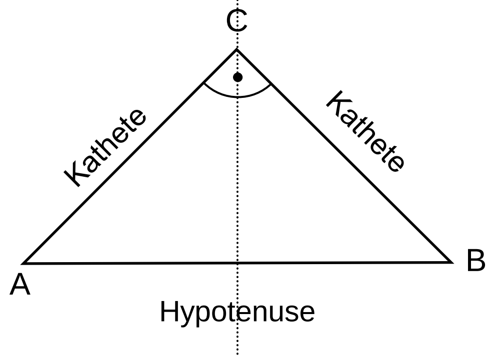
10. Achsensymmetrische Dreiecke und Vierecke

a) Achsensymmetrische Dreiecke

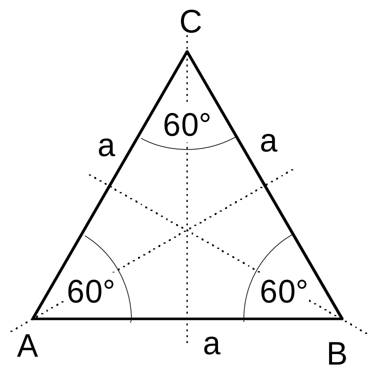
gleichschenkliges Dreieck



gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck

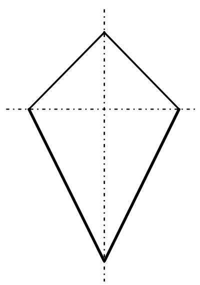


gleichseitiges Dreieck

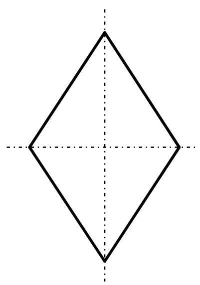


b) Achsensymmetrische Vierecke

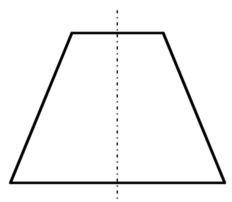
Drachenviereck



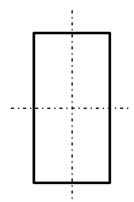
Raute



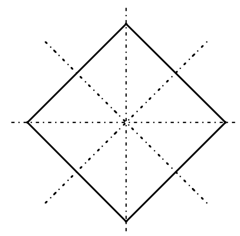
gleichschenkliges Trapez



Rechteck

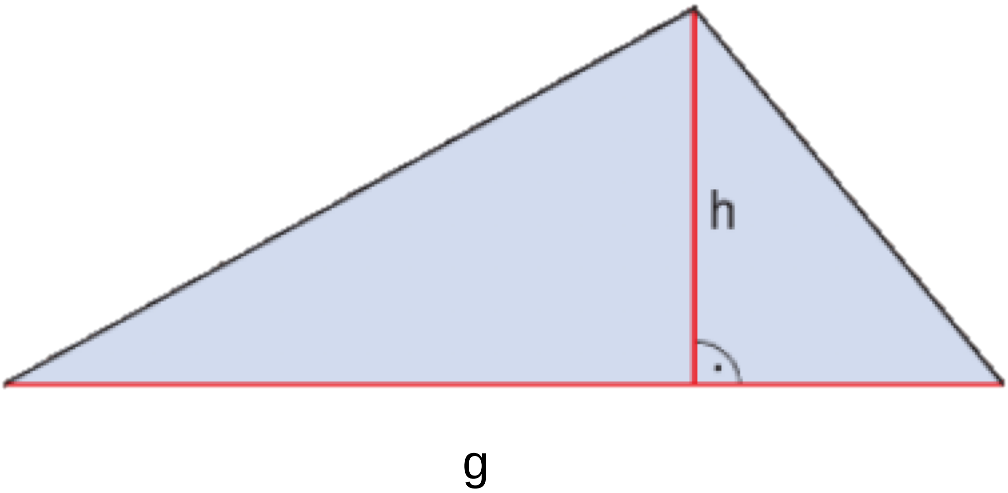


Quadrat



11. Flächeninhalt ebener Figuren

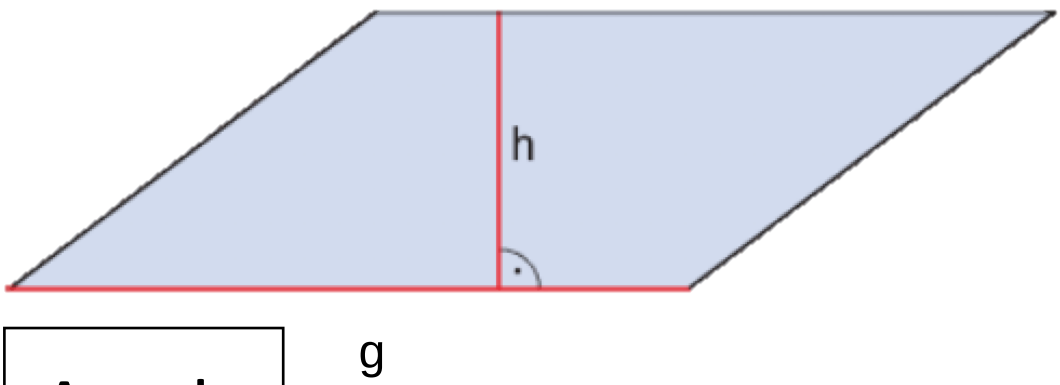
a) Flächeninhalt von Dreiecken



$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

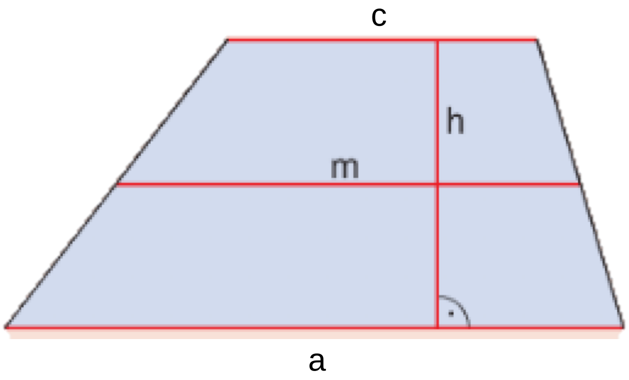
b) Flächeninhalt von Vierecken

Parallelogramm



$$A = g \cdot h$$

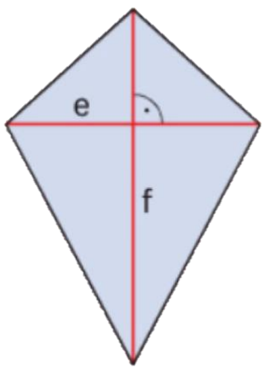
Trapez



$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

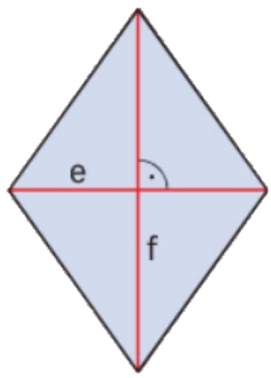
$$m = \frac{1}{2} \cdot (a + c)$$

Drachenviereck



$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

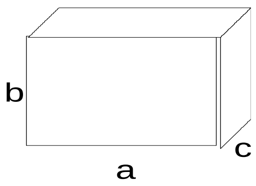
Raute

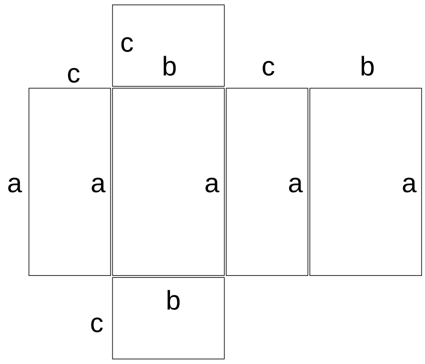


$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

12. Raumgeometrie

a) **Quader**



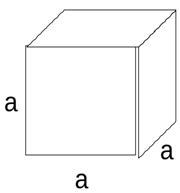


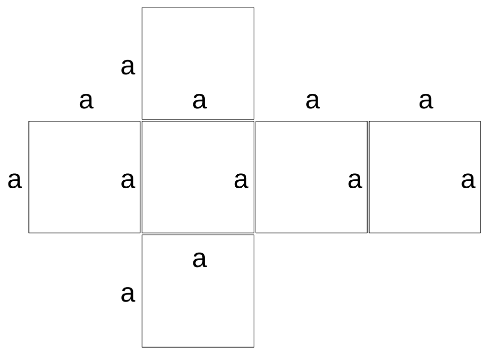
Oberfläche (O) des Quaders: $O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Volumen (V) des Quaders: $V = a \cdot b \cdot c$

b) **Würfel**





Oberfläche (O) des Würfels: $O = 6 \cdot a \cdot a = a^2$

Volumen (V) des Würfels: $V = a \cdot a \cdot a = a^3$

c) **Rauminhalt (Volumen)**

Rauminhalt	**Umwandlungszahl 1000**
1 m³ = 1000 dm³	m³ : Kubikmeter
1 dm³ = 1000 cm³	dm³ : Kubikdezimeter
1 cm³ = 1000 mm³	cm³ : Kubikzentimeter
1 mm³	mm³ : Kubikmillimeter
1 hℓ = 100 ℓ	hℓ : Hektoliter
	Umwandlungszahl 10
1 ℓ = 10 **dℓ** = **1 dm³**	ℓ : Liter
1 dℓ = 10 cℓ	dℓ : Deziliter
1 cℓ = 10 mℓ	cℓ : Zentiliter
1 mℓ = 1 cm³	mℓ : Milliliter